ШИФР М-11-1

участника муниципального этапа всероссийской олимпиады школьников по математике в 2023-2024 учебном году

Внимание! Шифровать следует каждую страницу Вашей письменной работы.

Ф. И. О. учащегося (в имен. пад.)

Иванов

Дмитрий

Игоревич

Дата рождения 02.08.2006

Образовательное учреждение (полное название) МАОУ „СОШ №4"

Город Мегион

Класс 11

Ф. И. О. учителя (полностью)

Магамедов

Иосиф

Магомедович

М-11-1 Всего 15б

1) $f(x)=\underset{\text{I}}{\frac{1}{x(x+1)}}+\underset{\text{II}}{\frac{1}{(x+1)(x+2)}}+\ldots+\underset{2023}{\frac{1}{(x+2022)(x+2023)}}$

Заметим, что слагаемых в $f(x)$ — всего 2023

введем $g(x)=\underbrace{\frac{1}{x}+\frac{1}{x}+\ldots+\frac{1}{x}}_{2023}=\frac{1}{x}(\underbrace{1+1+\ldots+1}_{2023})$

Сравним $f(2023)$ и $g(2023)$

Т.к. если $m>n$, то $\frac{1}{n}>\frac{1}{m}$ =>

=> $g(2023)=\underbrace{\frac{1}{2023}+\frac{1}{2023}+\ldots+\frac{1}{2023}}_{2023}=1$

$f(2023)=\underbrace{\frac{1}{2023\cdot2024}+\ldots+\frac{1}{4045\cdot4046}}_{2023}$

Т.к. кол-во слагаемых у $f(x)$ и $g(x)$ — одинаково т.е. 2023 и каждое соответствующее слагаемое $f(x)$ меньше слагаемого $g(x)$ (т.е. $\frac{1}{2023\cdot2024}<\frac{1}{2023}$ и т.д.), следовательно =>

=> $f(2023)<g(2023)=1$ => $f(2023)<1$. Ответ: нет, неверно.

2б

2) $A = \underbrace{\overline{xx\ldots x}}_{3^n}$ $A \vdots 3^n$?

B – сумма цифр числа A.

7б Заметим, что сумма цифр числа и само число имеют одинаковые остатки при делении на 3. Т.е. $B = \underbrace{x+x+\ldots+x}_{3^n} = 3^n \cdot x$ в разложении B на прост. множители входит число $3^n \Rightarrow B \vdots 3^n$, т.е. имеет остаток 0 при делении на 3^n, но тогда и A делится на 3^n без остатка. ч.т.д.

4) Неравенство $\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}} + \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}} < 2\sqrt{2}$

$\Leftrightarrow \dfrac{\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}} + \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2} < \sqrt{2}$ (1)

6б Неравенство между ср. арифм. и ср. квадратич.: $\dfrac{a+b}{2} \le \sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}$ (из КБШ), причем равенство достигается при $a = b$. Положим $a = \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}$, $b = \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}$ и посмотрим на ср. квадратич. этих чисел:

$\sqrt{\dfrac{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}+2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}} = \sqrt{2}$, также заметим, что в левой части нер-ства (1) – ср. арифм. чисел a и b, а также $a \ne b$, т.к. $\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}} \ne \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}$, но тогда становится ясно, что:

$$\frac{\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}} + \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2} < \sqrt{\frac{\left(\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}\right)^2 + \left(\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}\right)^2}{2}} = \sqrt{2}$$

ч.т.д.