Муниципальный этап всероссийской олимпиады школьников по математике
Ханты-Мансийский автономный округ – Югра
2023-2024 учебный год

ОТВЕТЫ, РЕШЕНИЯ, КРИТЕРИИ

9 класс

1. *Ответ:* последняя цифра равна 3.

Решение:

1) Если вычеркнуть все требуемые числа, то в итоге мы получим произведение сомножителей, оканчивающихся на 1, 3, 7 и 9.

2) Каждая такая четверка при умножении будет давать число, оканчивающееся цифрой 9.
3) Значит, на каждую десятку первоначально умножаемых чисел после вычеркивания приходится произведение, оканчивающееся на 9.

4) А на каждые 20 – оканчивающееся на 1.

5) В ряду 1, 2, 3,…, 2022, 2023 таких полных двадцаток 101. При перемножении чисел от 1 до 2019, таким образом, получим число с цифрой 1 на конце.

6) Домножив на 2021 и на 2023, в итоге получим значение, оканчивающееся цифрой 3.

Критерии оценивания

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
7	Полное верное решение
6	Решение содержит незначительные погрешности, но в целом, верно и может стать полностью правильным после небольших исправлений или дополнений
5	Решение содержит незначительные погрешности, некоторые переходы не обоснованы, но в целом верно и может стать полностью правильным после небольших исправлений или дополнений
4	Приведены идеи для решения, но преобразования содержат 1 существенную ошибку или не доведены до конца
3	Приведены идеи для решения, но преобразования содержат более 1 существенной ошибки или не доведены до конца
2	Дан верный ответ, который обоснован некоторыми аргументами, но ясного обоснования решение не содержит
1	Дан верный ответ, ясного обоснования решение не содержит.
0	Решение отсутствует

Задание №2. Ответ: $f(x)=\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$

Решение:

РЕШЕНИЕ ЗАДАНИЯ 2.

т.к. $x>1$, то $\sqrt{x^2-1}>0$.

РАССМОТРИМ $x^2+4x-5=0$

по теореме ВИЕТА

$$\left.\begin{matrix} x_1+x_2=-4 \\ x_1\cdot x_2=-5 \end{matrix}\right] \begin{matrix} x_1=-5 \\ x_2=1 \end{matrix}$$

$$x^2+4x-5=(x+5)(x-1)$$

РАССМОТРИМ $x^2-4x-5=0$

по теореме ВИЕТА

$$\left.\begin{matrix} x_1+x_2=+4 \\ x_1 x_2=-5 \end{matrix}\right] \begin{matrix} x_1=-1 \\ x_2=5 \end{matrix}$$

$$x^2-4x-5=(x-5)(x+1)$$

ЗАМЕНИМ:

$$\frac{(x+5)(x-1)+(x-5)\sqrt{x^2-1}}{(x-5)(x+1)+(x+5)\sqrt{x^2-1}}=\frac{(x+5)\cdot\sqrt{(x-1)^2}+(x-5)\sqrt{(x-1)(x+1)}}{(x-5)\sqrt{(x+1)^2}+(x+5)\sqrt{(x-1)(x+1)}}$$

$$=\frac{\sqrt{x-1}\left((x+5)\sqrt{(x-1)}+(x-5)\sqrt{(x+1)}\right)}{\sqrt{x+1}\left((x-5)\sqrt{(x+1)}+(x+5)\sqrt{(x-1)}\right)}=\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}.$$

Критерии оценивания

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
7	Полное верное решение
6	Решение содержит незначительные погрешности, но в целом, верно и может стать полностью правильным после небольших исправлений или дополнений
5	Решение содержит незначительные погрешности, некоторые переходы не обоснованы, но в целом верно и может стать полностью правильным после небольших исправлений или дополнений
4	Приведены идеи для решения, но преобразования содержат 1 существенную ошибку или не доведены до конца
3	Приведены идеи для решения, но преобразования содержат более 1 существенной ошибки или не доведены до конца
2	Дан верный ответ, который обоснован некоторыми аргументами, но ясного обоснования решение не содержит
1	Дан верный ответ, ясного обоснования решение не содержит.
0	Решение отсутствует

Задание №3. *Ответ:* нет, не существует.

Решение:

Для того, чтобы существовал прямоугольный треугольник со сторонами a, b, c, необходимо, чтобы выполнялись условия $0 < a, b < c$ и $a^2 + b^2 = c^2$. Очевидно, что из трех предложенных величин наибольшей является $4 + x^2$. По теореме, обратной теореме Пифагора если квадрат стороны треугольника равен сумме квадратов двух его других сторон, то треугольник прямоугольный. Поэтому решим уравнение:

$(4 + x^2)^2 = (x^2)^2 + (2 + x^2)^2$.

РЕШЕНИЕ ЗАДАНИЯ №3

Х – НЕКОТОРОЕ ЦЕЛОЕ ЧИСЛО. $0 < a, в < c$

ПО ТЕОРЕМЕ, ОБРАТНОТ Т. ПИФАГОРА, ЕСЛИ $c^2 = a^2 + в^2$, ТО ТРЕУГОЛЬНИК ПРЯМОУГОЛЬНЫЙ

$c = 4 + x^2$

$a = 2 + x^2 \quad \Rightarrow \quad (4+x^2)^2 = (2+x^2)^2 + x^4$

$в = x^2$

$16 + 8x^2 + x^4 = 4 + 4x^2 + x^4 + x^4$

$2x^4 + 4x^2 + 4 - x^4 - 8x - 16 = 0.$

$x^4 - 4x^2 - 12 = 0$

Пусть $x^2 = a$

$a^2 - 4a - 12 = 0$

$\left.\begin{array}{l} a_1 \cdot a_2 = -12 \\ a_1 + a_2 = 4 \end{array}\right] \quad \begin{array}{l} a_1 = -2 \\ a_2 = 6 \end{array}$

$x^2 = -2$ не им. смысла

$x^2 = 6$

$x = \pm\sqrt{6}$

$x = \sqrt{6}.$

ОТВЕТ: НЕ СУЩЕСТВУЕТ.

Критерии оценивания

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
7	Полное верное решение
6	Решение содержит незначительные погрешности, но в целом, верно и может стать полностью правильным после небольших исправлений или дополнений
5	Решение содержит незначительные погрешности, некоторые переходы не обоснованы, но в целом верно и может стать полностью правильным после небольших исправлений или дополнений
4	Приведены идеи для решения, но преобразования содержат 1 существенную ошибку или не доведены до конца
3	Приведены идеи для решения, но преобразования содержат более 1 существенной ошибки или не доведены до конца
2	Дан верный ответ, который обоснован некоторыми аргументами, но ясного обоснования решение не содержит
1	Дан верный ответ, ясного обоснования решение не содержит.
0	Решение отсутствует

Задание №4.

РЕШЕНИЕ ЗАДАНИЯ 4:

(1) $x+y+z=1$;

1) если $x=y=z=\frac{1}{3}$ (т.к. $\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=1$), то

$$xy+yz+xz-2xyz=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}-2\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{9}{27}-\frac{2}{27}=\frac{7}{27}$$

2) если $x\neq y\neq z$, то допустим $z\leq\frac{1}{3}$

Докажем, что данное выражение не отрицательно:

$$\underline{xy}+\underline{yz}+\underline{xz}-\underline{2xyz}=xy(1-2z)+(x+y)z\geq\frac{1}{3}xy+(x+y)z\geq 0$$

Докажем, что данное выражение не превышает $\frac{7}{27}$:

используя $x+y=1-z$ (из 1) и применив неравенство Коши ($\frac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}\Leftrightarrow\left(\frac{a+b}{2}\right)^2\geq ab$), заменим xy на $\left(\frac{x+y}{2}\right)^2$

имеем $xy+yz+xz-2xyz=xy(1-2z)+(x+y)z\leq$

$$\leq\left(\frac{x+y}{2}\right)^2(1-2z)+z(1-z)=\left(\frac{1-z}{2}\right)^2(1-2z)+z(1-z)=$$

$$=\frac{1-2z+z^2}{4}\cdot(1-2z)+z-z^2=\frac{(1-2z+z^2)(1-2z)+4z-4z^2}{4}=$$

$$=\frac{1-2z-2z+4z^2+z^2-2z^3+4z-4z^2}{4}=\frac{-2z^3+z^2+1}{4}$$

Т.к. $z\geq 0$ и $z\leq\frac{1}{3}$, значит $z\in[0;\frac{1}{3}]$

проверим и найдем значения выражения на концах промежутка:

при $z=0$ значение выражения $\frac{1}{4}$

при $z=\frac{1}{3}$ значение выражения $\frac{7}{27}$, тогда $\frac{1}{4}<\frac{7}{27}$

$$0\leq xy+yz+xz-2xyz\leq\frac{7}{27}$$

ч.т.д.

Критерии оценивания

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
7	Полное верное решение
6	Решение содержит незначительные погрешности, но в целом, верно и может стать полностью правильным после небольших исправлений или дополнений
5	Решение содержит незначительные погрешности, некоторые переходы не обоснованы, но в целом верно и может стать полностью правильным после небольших исправлений или дополнений
4	Приведены идеи для решения, но преобразования содержат 1 существенную ошибку или не доведены до конца
3	Приведены идеи для решения, но преобразования содержат не более 3 существенных ошибок или не доведены до конца
2	Дан верный ответ, который обоснован некоторыми аргументами, но ясного обоснования решение не содержит
1	Дан верный ответ, ясного обоснования решение не содержит.
0	Решение отсутствует

Задание №5. *Ответ:* 20 треугольников.

Решение:

1 способ.

Треугольник существует, если сумма любых двух сторон больше третьей стороны. Любая пара из данных четырех чисел удовлетворяет этому условию, поэтому геометрическое условие на существование треугольника выполняется автоматически, и задача с геометрическим содержанием превращается в чисто комбинаторную.

В этой задаче некоторые выборки могут содержать одинаковые элементы. Например, равносторонний треугольник (5; 5; 5), равнобедренный треугольник (5; 5; 8). Два равнобедренных треугольника (5; 5; 8) и (5; 8; 5) следует считать одинаковыми.

Можно использовать формулу сочетаний с повторениями: когда порядок расположения элементов в выборке не имеет значения и элементы могут повторяться:

$$\overline{C_n^m} = C_{m+n-1}^m = \frac{(m+n-1)!}{m!(n-1)!}$$

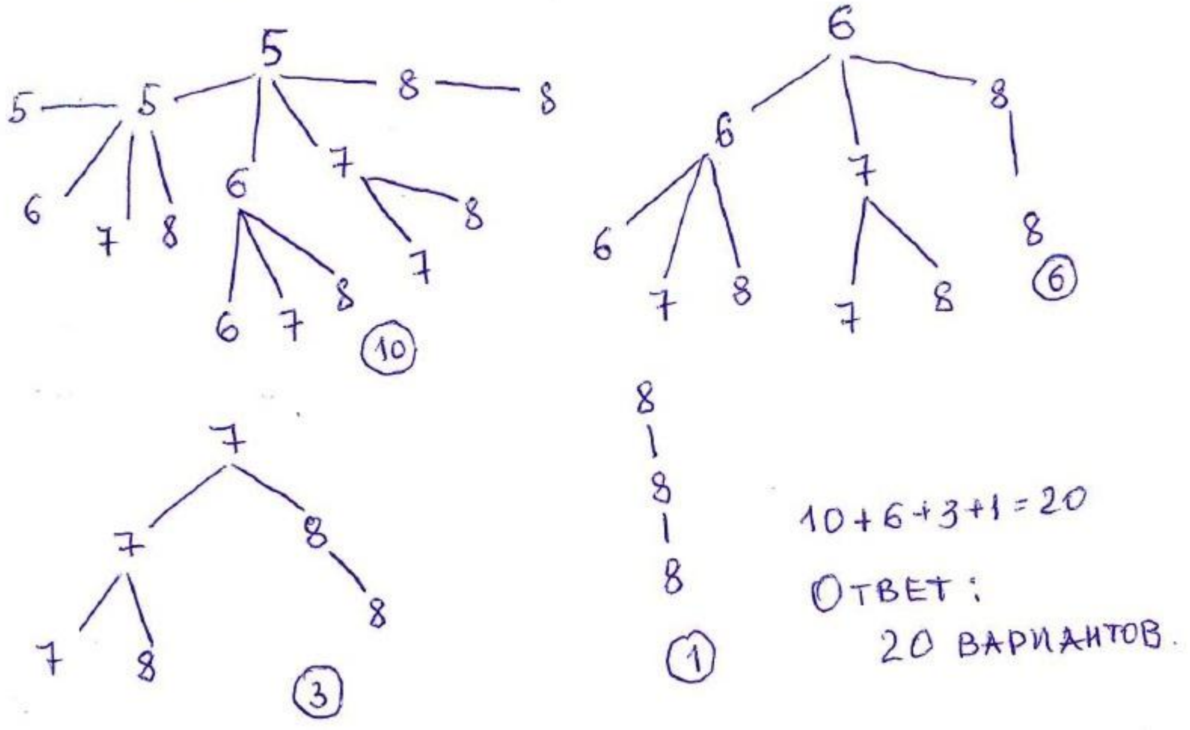
Решение задачи можно представить, применив формулу: $\overline{C_4^3} = \mathbf{C_{3+4-1}^3} = \mathbf{C_6^3} = \mathbf{20}$

Или такими рассуждениями: $C_4^3 + C_4^1 \cdot C_3^1 + C_4^1 = 4 + 4 \cdot 3 + 4 = 20$

2 способ.

Треугольник существует, если сумма любых двух сторон больше третьей стороны. Любая пара из данных четырех чисел удовлетворяет этому условию, поэтому геометрическое условие на существование треугольника выполняется автоматически, и задача с геометрическим содержанием превращается в чисто комбинаторную.

Используя дерево возможностей:



Муниципальный этап всероссийской олимпиады школьников по математике
Ханты-Мансийский автономный округ – Югра
2023-2024 учебный год

Критерии оценивания

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
7	Полное верное решение
6	Решение содержит незначительные погрешности, но в целом, верно и может стать полностью правильным после небольших исправлений или дополнений
5	Решение содержит незначительные погрешности, некоторые переходы не обоснованы, но в целом верно и может стать полностью правильным после небольших исправлений или дополнений
4	Приведены идеи для решения, но преобразования содержат 1 существенную ошибку или не доведены до конца
3	Приведены идеи для решения, но преобразования содержат не более 3 существенных ошибок или не доведены до конца
2	Дан верный ответ, который обоснован некоторыми аргументами, но ясного обоснования решение не содержит
1	Дан верный ответ, ясного обоснования решение не содержит.
0	Решение отсутствует