

ОТВЕТЫ, РЕШЕНИЯ, КРИТЕРИИ

7 класс

1. *Ответ:* нет, неверно.

Решение:

Способ 1.

Пусть красные фишки означают число -1 , а синие означают число $+1$. Замена фишек означает смену знака. Изначально произведение всех чисел равно -1 . Если бы все фишки стали одного цвета, то произведение всех чисел должно было бы равняться $+1$. Но при замене двух фишек произведение останется равным -1 . Значит, сколько бы мы не повторяли разрешенную операцию, мы не сможем получить $+1$.

Способ 2.

Заменим красные фишки нулями, синие – единицами. При исходных условиях сумма фишек будет равна 11. Легко видеть, что допустимые операции не меняют сумму этих чисел. В исходном положении эта сумма равнялась 11, значит, и всегда будет равна 11. Поэтому получить желаемое расположение фишек (с суммой 12) невозможно.

Критерии оценивания

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
7	Полное верное решение
6	Решение содержит незначительные погрешности, но в целом, верно и может стать полностью правильным после небольших исправлений или дополнений
5	Решение содержит незначительные погрешности, некоторые переходы не обоснованы, но в целом верно и может стать полностью правильным после небольших исправлений или дополнений
4	Приведены идеи для решения, но преобразования содержат 1 существенную ошибку или не доведены до конца
3	Приведены идеи для решения, но преобразования содержат более 1 существенной ошибки или не доведены до конца
2	Дан верный ответ, который обоснован некоторыми аргументами, но ясного обоснования решение не содержит
1	Дан верный ответ, ясного обоснования решение не содержит.
0	Решение отсутствует

2. Ответ: $a > b$.

Решение:

Способ 1. Пусть $23^{2022} = t$, тогда $23^{2023} = 23t$, $23^{2024} = 23^2t$.

$$\frac{a}{b} = \frac{t+1}{23t+1} \cdot \frac{23^2t+1}{23t+1} = \frac{(23t)^2 + (23^2+1)t+1}{(23t)^2 + 2 \cdot 23t + 1} = 2 + \frac{(23^2+1)}{2 \cdot 23}.$$

Так как $23^2 + 1 > 2 \cdot 23$, то $a > b$.

Способ 2.

$$a - b = \frac{(23^{2022} + 1)(23^{2024} + 1) - (23^{2023} + 1)^2}{(23^{2023} + 1)(23^{2024} + 1)}.$$

После раскрытия скобок и приведения подобных слагаемых, получим

$$\frac{23^{2022}(23^2 - 2 \cdot 23 + 1)}{(23^{2023} + 1)(23^{2024} + 1)} > 0$$

Так как каждый множитель в числителе и знаменателе полученной дроби является положительным числом, то значение дроби-положительное число. Поэтому $a > b$.

Способ 3.

$$\frac{a}{b} = \frac{(23^{2022} + 1)}{(23^{2023} + 1)} \cdot \frac{(23^{2024} + 1)}{(23^{2023} + 1)} = (23^{-1} + 1)(23^{-1} + 1) = 1 \frac{1}{23} \cdot 1 \frac{1}{23} = \frac{676}{529} > 1$$

Если результат частного больше 1, то и $a > b$.

Критерии оценивания

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
7	Полное верное решение
6	Решение содержит незначительные погрешности, но в целом, верно и может стать полностью правильным после небольших исправлений или дополнений
5	Решение содержит незначительные погрешности, некоторые переходы не обоснованы, но в целом верно и может стать полностью правильным после небольших исправлений или дополнений
4	Приведены идеи для решения, но преобразования содержат 1 существенную ошибку или не доведены до конца
3	Приведены идеи для решения, но преобразования содержат более 1 существенной ошибки или не доведены до конца
2	Дан верный ответ, который обоснован некоторыми аргументами, но ясного обоснования решение не содержит
1	Дан верный ответ, ясного обоснования решение не содержит.
0	Решение отсутствует

*Муниципальный этап всероссийской олимпиады школьников по математике
Ханты-Мансийский автономный округ – Югра
2023-2024 учебный год*

3. *Ответ:* 1 треугольник.

Решение:

Решение данной задачи можно представить в разных видах (перебор вариантов, рисунков треугольников или др.).

Заметим, что четыре числа можно разбить на тройки 4 способами. Однако для того, чтобы эти числа выражали длины сторон треугольника, необходимо, чтобы выполнялось неравенство треугольника $a + b > c$. Этому условию удовлетворяет только набор 2, 3, 4.

Критерии оценивания

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
7	Полное верное решение
6	Решение содержит незначительные погрешности, но в целом, верно и может стать полностью правильным после небольших исправлений или дополнений
5	Решение содержит незначительные погрешности, некоторые переходы не обоснованы, но в целом верно и может стать полностью правильным после небольших исправлений или дополнений
4	Приведены идеи для решения, но преобразования содержат 1 существенную ошибку или не доведены до конца
3	Приведены идеи для решения, но преобразования содержат более 1 существенной ошибки или не доведены до конца
2	Дан верный ответ, который обоснован некоторыми аргументами, но ясного обоснования решение не содержит
1	Дан верный ответ, ясного обоснования решение не содержит.
0	Решение отсутствует

*Муниципальный этап всероссийской олимпиады школьников по математике
Ханты-Мансийский автономный округ – Югра
2023-2024 учебный год*

4. Доказательство.

Поскольку $abc = 1$, то переменные a, b, c можно представить в виде

$$a = \frac{x}{y}, b = \frac{y}{z}, c = \frac{z}{x}.$$

В таком случае исходное неравенство будет равносильно неравенству

$$(x - y + z)(y - z + x)(z - x + y) \leq xyz, \quad (*)$$

где $x > 0, y > 0, z > 0$.

Введем новые переменные $u = x - y + z, v = y - z + x$ и $w = z - x + y$.

Тогда $x = \frac{u+v}{2}, y = \frac{v+w}{2}, z = \frac{u+w}{2}$ неравенство (*) принимает вид

$$(u + v)(v + w)(u + w) \geq 8uvw, \quad (**)$$

где $u > 0, v > 0, w > 0$.

Справедливость неравенства (**) легко следует из неравенства Коши, так как

$$u + v \geq 2\sqrt{uv}, v + w \geq 2\sqrt{vw} \text{ и } u + w \geq 2\sqrt{uw}.$$

Следовательно, требуемое неравенство доказано.

Критерии оценивания

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
7	Полное верное решение
6	Решение содержит незначительные погрешности, но в целом, верно и может стать полностью правильным после небольших исправлений или дополнений
5	Решение содержит незначительные погрешности, некоторые переходы не обоснованы, но в целом верно и может стать полностью правильным после небольших исправлений или дополнений
4	Приведены идеи для решения, но преобразования содержат 1 существенную ошибку или не доведены до конца
3	Приведены идеи для решения, но преобразования содержат более 1 существенной ошибки или не доведены до конца
2	Дан верный ответ, который обоснован некоторыми аргументами, но ясного обоснования решение не содержит
1	Дан верный ответ, ясного обоснования решение не содержит.
0	Решение отсутствует

Муниципальный этап всероссийской олимпиады школьников по математике
Ханты-Мансийский автономный округ – Югра
2023-2024 учебный год

5. Ответ: 10 способов.

Решение:

Решение данной задачи можно представить в разных видах (текст, таблица или др.),

но удобно изображать в виде «дерева», которое представлено на рис. 1.

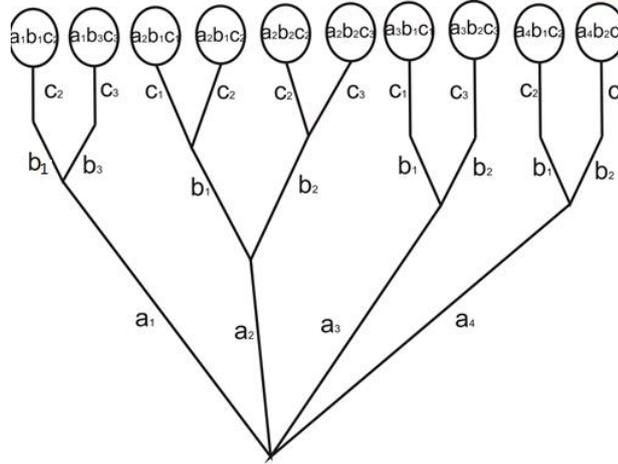


Рис. 1

Оно показывает, что есть лишь 10 допустимых комбинаций.

При этом после каждого выбора командира a_i у нас есть 2 варианта выбора инженера b_j , поэтому появляется 8 пар командир-инженер, а дальше для каждой такой пары в 6 случаях врач c_k определен единственным образом (в силу требований совместимости), а в 2 случаях есть выбор из двух врачей.

Если бы не было ограничения совместимости, то после каждого из 4 возможных способов выбора командира a_i у нас было бы 3 варианта выбора инженера b_j , а затем по 3 варианта выбора врача c_k , и комбинаций было бы $4 \cdot 3 \cdot 3 = 36$.

Критерии оценивания

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
7	Полное верное решение
6	Решение содержит незначительные погрешности, но в целом, верно и может стать полностью правильным после небольших исправлений или дополнений
5	Решение содержит незначительные погрешности, некоторые переходы не обоснованы, но в целом верно и может стать полностью правильным после небольших исправлений или дополнений
4	Приведены идеи для решения, но преобразования содержат 1 существенную ошибку или не доведены до конца
3	Приведены идеи для решения, но преобразования содержат более 1 существенной ошибки или не доведены до конца
2	Дан верный ответ, который обоснован некоторыми аргументами, но ясного обоснования решение не содержит
1	Дан верный ответ, ясного обоснования решение не содержит.
0	Решение отсутствует