

ОТВЕТЫ, РЕШЕНИЯ, КРИТЕРИИ

10 класс

1. *Ответ:* нет, не верно.

Решение:

По кругу расставлены 2023 числа.

Если сложить любые два соседних числа, то сумма окажется положительной, но при этом сумма всех записанных чисел отрицательна. Так как сумма каждой пары соседних чисел является положительной, а сумма всех чисел отрицательна, то предположим, что количество положительных чисел больше количества отрицательных чисел. Пусть положительных чисел будет P , а отрицательных чисел – N . Тогда можно записать следующее уравнение: $P + N = 2023$.

Верно ли, что произведение всех чисел положительно? Для ответа на этот вопрос, мы можем применить математические законы. Обозначим произведение всех чисел как M .

Рассмотрим возможные ситуации:

- Если $N=0$, то все числа должны быть положительными. В таком случае, произведение M будет положительным.
- Если N не равно 0, то мы можем расставить число нулей между всеми положительными числами, чтобы выполнить условие задачи.

Таким образом, у нас всегда будет хотя бы один 0 и произведение всех чисел будет равно 0. Таким образом, ответ на поставленный вопрос – произведение всех чисел не обязательно положительно. Возможно, оно будет равно нулю. Однако следует отметить, что в данной задаче не представлена информация о допустимых значениях чисел или их связях. Поэтому необходимо иметь дополнительные условия или ограничения для решения этой задачи.

Критерии оценивания

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
7	Полное верное обоснование
6	Обоснование верное, но имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение
5	Решение в целом верное. Однако оно содержит ряд ошибок, либо не рассмотрено отдельных случаев, но может стать правильным после небольших исправлений или дополнений.
4	Верно рассмотрены несколько существенных случаев.
3	Приведены идеи для решения, но преобразования содержит существенные ошибки или не доведены до конца.
1-2	Дан верный ответ, который обоснован некоторыми аргументами, но ясного обоснования решение не содержит
0	Решение отсутствует

Муниципальный этап всероссийской олимпиады школьников по математике
Ханты-Мансийский автономный округ – Югра
2023-2024 учебный год

2. Доказательство:

Докажем данное утверждение методом математической индукции.

При $n = 1$ число \overline{aaa} , составленное из трех одинаковых цифр, делится на 3^1 по признаку делимости на 3. $\overline{aaa} = a \cdot 100 + a \cdot 10 + a = a(100 + 10 + 1) = a \cdot 111$. Произведение $a \cdot 111$ по признаку делимости и свойству делимости делится на 3.

Пусть число, составленное из 3^n одинаковых цифр, делится на 3^n (индуктивное предположение).

Докажем, что число, составленное из 3^{n+1} одинаковых цифр, делится на 3^{n+1} .

Итак,

$$\begin{aligned} \underbrace{\overline{aaa \dots a}}_{3^{n+1} \text{ раз}} &= \underbrace{\overline{aa \dots a}}_{3^n \text{ раз}} \underbrace{\overline{aa \dots a}}_{3^n \text{ раз}} \underbrace{\overline{aa \dots a}}_{3^n \text{ раз}} = \underbrace{\overline{aa \dots a}}_{3^n \text{ раз}} \underbrace{\overline{00 \dots 0}}_{3^n \text{ раз}} \underbrace{\overline{00 \dots 0}}_{3^n \text{ раз}} + \underbrace{\overline{aa \dots a}}_{3^n \text{ раз}} \underbrace{\overline{00 \dots 0}}_{3^n \text{ раз}} + \underbrace{\overline{aa \dots a}}_{3^n \text{ раз}} = \\ &= \underbrace{\overline{aa \dots a}}_{3^n \text{ раз}} \cdot 1 \underbrace{\overline{00 \dots 0}}_{3^n \text{ раз}} \underbrace{\overline{00 \dots 0}}_{3^n \text{ раз}} + \underbrace{\overline{aa \dots a}}_{3^n \text{ раз}} \cdot 1 \underbrace{\overline{00 \dots 0}}_{3^n \text{ раз}} + \underbrace{\overline{aa \dots a}}_{3^n \text{ раз}} = \\ &= \underbrace{\overline{aa \dots a}}_{3^n \text{ раз}} \cdot \left(1 \underbrace{\overline{00 \dots 0}}_{3^n \text{ раз}} \underbrace{\overline{00 \dots 0}}_{3^n \text{ раз}} + 1 \underbrace{\overline{00 \dots 0}}_{3^n \text{ раз}} + 1 \right) = \underbrace{\overline{aa \dots a}}_{3^n \text{ раз}} \cdot 100 \dots 0100 \dots 01. \end{aligned}$$

Из двух сомножителей первый делится на 3^n (индуктивное предположение), а второй делится на 3 по признаку делимости на 3. Значит, все произведение делится на $3 \cdot 3^n = 3^{n+1}$. Что и требовалось доказать.

Критерии оценивания

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
7	Полное верное решение
6	Решение верное, но содержит незначительные погрешности
5	Решение верное, но не проведена проверка первого шага методом математической индукции.
4	Приведены идеи для решения, но не все шаги метода исследованы.
3	Приведены идеи для решения, но преобразования содержат существенные ошибки.
2	Дан верный ответ, который обоснован некоторыми аргументами
1	Дан верный ответ, который обоснован некоторыми аргументами, но ясного обоснования решение не содержит
0	Решение отсутствует

*Муниципальный этап всероссийской олимпиады школьников по математике
Ханты-Мансийский автономный округ – Югра
2023-2024 учебный год*

3. *Ответ:* нет, не может.

Доказательство:

По условию задачи нам нужна пара точек, расстояние между которыми равно 8. Точки могут принадлежать одной грани или разным. Гранями прямоугольного параллелепипеда являются прямоугольники. Наиболее удаленные точки прямоугольника – концы диагонали. Вычислим длины этих диагоналей по теореме Пифагора. В прямоугольнике со смежными сторонами 3 и 4 диагональ равна 5. В прямоугольнике со смежными сторонами 3 и 5 диагональ равна $\sqrt{34}$. В прямоугольнике со смежными сторонами 5 и 4 диагональ равна $\sqrt{41}$. Эти значения меньше 8. Наиболее удаленными точками прямоугольного параллелепипеда являются вершины его диагонали. Длину диагонали найдем по пространственной теореме Пифагора $d^2 = a^2 + b^2 + c^2$, где a, b, c – измерения прямоугольного параллелепипеда. Вычисляя, получаем, что $d = \sqrt{3^2 + 4^2 + 5^2} = \sqrt{50}$, т.к. $\sqrt{50} < \sqrt{64} = 8$, ответ отрицательный.

Критерии оценивания

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
7	Полное верное решение
6	Полное верное решение, но отсутствует $\sqrt{50} < \sqrt{64} = 8$
5	Решение содержит незначительные погрешности, некоторые переходы не обоснованы, но в целом верно и может стать полностью правильным после небольших исправлений или дополнений
4	Приведены идеи для решения, но преобразования содержат существенные ошибки или не доведены до конца
3	Приведены идеи для решения, но преобразования содержат существенные ошибки или не доведены до конца, не рассмотрены все случаи.
2	Дан верный ответ, который обоснован некоторыми аргументами.
1	Дан верный ответ, который обоснован некоторыми аргументами, но ясного обоснования решение не содержит
0	Решение отсутствует

*Муниципальный этап всероссийской олимпиады школьников по математике
Ханты-Мансийский автономный округ – Югра
2023-2024 учебный год*

4. Решение.

Неравенство $200020012002^{200020012003} \vee 200020012003^{200020012002}$ равносильно неравенству:

$$200020012002^{1/200020012002} \vee 200020012003^{1/200020012003}$$

Тем самым, нам надо исследовать на монотонность функцию $f(x) = x^{1/x}$. Её производная отрицательна при $x > e$:

$$f'(x) = (e^{\ln(x)/x})' = x^{1/x} \left(\frac{\ln(x)}{x} \right)' = x^{1/x} \cdot \frac{1-\ln(x)}{x^2}.$$

Поскольку $200020012002 > e$, то $\vee = ">"$.

Допускается другой способ решения, если он обоснован.

Критерии оценивания

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
7	Полное верное решение
5-6	Решение содержит незначительные погрешности, некоторые переходы не обоснованы, но в целом верно и может стать полностью правильным после небольших исправлений или дополнений
3-4	Приведены идеи для решения, но преобразования содержат существенные ошибки или не доведены до конца
1-2	Дан верный ответ, который обоснован некоторыми аргументами, но ясного обоснования решение не содержит
0	Решение отсутствует

Муниципальный этап всероссийской олимпиады школьников по математике
Ханты-Мансийский автономный округ – Югра
2023-2024 учебный год

5. Ответ: 0,25.

Решение:

Площадь части круга, где по условию могла застыть часовая стрелка, составляет четверть площади всего круга (рис. 3).

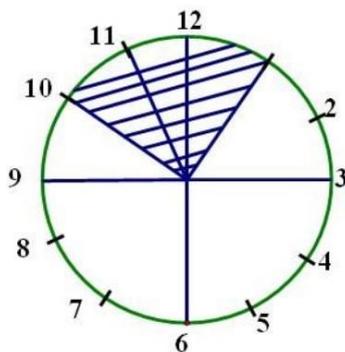


Рис. 3

Следовательно, применив геометрическое толкование вероятности события, которое определяется как отношение меры области (длины, площади, объема) к мере пространства элементарных событий, получаем ответ $\frac{3}{12} = \frac{1}{4}$ или 0,25.

Критерии оценивания

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
7	Полное верное решение
6	Обоснование верное, но имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение
5	Дан верный ответ, но отсутствует обоснование дроби 3/12
0	Решение отсутствует