ОТВЕТЫ, РЕШЕНИЯ, КРИТЕРИИ

11 класс

1. *Ответ:* нет, неверно.

Решение:

Преобразуем формулу, задающую функцию

Представив каждое слагаемое в виде разности двух дробей

$$f(x)=\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}\right)+\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{x+2021}-\frac{1}{x+2022}\right)+\left(\frac{1}{x+2022}-\frac{1}{x+2023}\right).$$

После приведения подобных слагаемых, получим

$$f(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{x+2023}=\frac{2023}{x(x+2023)}.$$

f(2023)= $\frac{2023}{2023(2023+2023)}$=$\frac{1}{4046}<1$, значит неверно

Критерии оценивания

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
7	Полное верное решение
6	Решение верное, но содержит незначительные погрешности
5	Решение верное, но некоторые переходы и этапы решения не полностью обоснованы
4	Приведены идеи для решения, но преобразования содержат 1 существенную ошибку или не доведены до конца
3	Приведены идеи для решения, но преобразования содержат более одной существенной ошибки или не доведены до конца
2	Дан верный ответ, который обоснован некоторыми аргументами, но ясного обоснования решение не содержит
1	Дан верный ответ без обоснования решения
0	Решение отсутствует

2. *Решение:*

Докажем данное утверждение методом математической индукции.

При $n = 1$ число $\overline{aaa}$, составленное из трех одинаковых цифр, делится на 3^1 по признаку делимости на 3.

Действительно, $\overline{aaa}=a10^2+a10^1+a=a(100+10+1)= 111a$,
по признаку делимости и свойству делимости делится на 3

Пусть число, составленное из 3^n одинаковых цифр, делится на 3^n (индуктивное предположение).

Докажем, что число, составленное из 3^{n+1} одинаковых цифр, делится на 3^{n+1}.

Итак,

$$\underbrace{\overline{aaa\ldots a}}_{3^{n+1}\text{ раз}} = \underbrace{\overline{aa\ldots a}}_{3^n\text{ раз}}\underbrace{\overline{aa\ldots a}}_{3^n\text{ раз}}\underbrace{\overline{aa\ldots a}}_{3^n\text{ раз}} = \underbrace{\overline{aa\ldots a}}_{3^n\text{ раз}}\underbrace{\overline{00\ldots 0}}_{3^n\text{ раз}}\underbrace{\overline{00\ldots 0}}_{3^n\text{ раз}} + \underbrace{\overline{aa\ldots a}}_{3^n\text{ раз}}\underbrace{\overline{00\ldots 0}}_{3^n\text{ раз}} + \underbrace{\overline{aa\ldots a}}_{3^n\text{ раз}} =$$

$$= \underbrace{\overline{aa\ldots a}}_{3^n\text{ раз}} \cdot 1\underbrace{00\ldots 0}_{3^n\text{ раз}}\underbrace{00\ldots 0}_{3^n\text{ раз}} + \underbrace{\overline{aa\ldots a}}_{3^n\text{ раз}} \cdot 1\underbrace{00\ldots 0}_{3^n\text{ раз}} + \underbrace{\overline{aa\ldots a}}_{3^n\text{ раз}} =$$

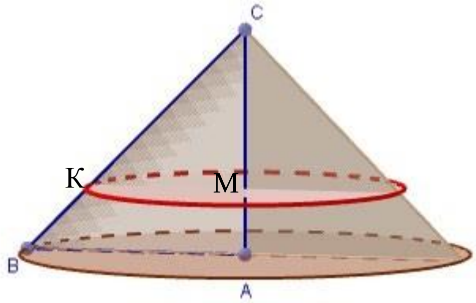
$$= \underbrace{\overline{aa\ldots a}}_{3^n\text{ раз}} \cdot \left(1\underbrace{00\ldots 0}_{3^n\text{ раз}}\underbrace{00\ldots 0}_{3^n\text{ раз}} + 1\underbrace{00\ldots 0}_{3^n\text{ раз}} + 1\right) = \underbrace{\overline{aa\ldots a}}_{3^n\text{ раз}} \cdot 100\ldots 0100\ldots 01.$$

Из двух сомножителей первый делиться на 3^n (индуктивное предположение), а второй делится на 3 по признаку делимости на 3. Значит, все произведение делится на $3 \cdot 3^n = 3^{n+1}$. Что и требовалось доказать.

Критерии оценивания

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
7	Полное верное решение
6	Решение верное, но содержит незначительные погрешности
5	Решение верное, но не проведена проверка первого шага метода математической индукции
4	Приведены идеи решения, но не все шаги метода исследованы
3	Приведены идеи для решения, но преобразования содержат существенные ошибки
2	Дан верный ответ, который обоснован некоторыми аргументами, но ясного обоснования решение не содержит
1	Дан верный ответ без обоснования
0	Решение отсутствует

3. *Ответ:* $\pi R\sqrt{2}$.
Решение:



При построении окружности на поверхности конуса с центром в точке C образовалось два конуса. Докажем, что они подобны, для этого докажем подобие треугольников ACB и MCK.

Заметим, что CA и CM- высоты исходного и получившегося конусов. Следовательно, Δ ACB и Δ MCK-прямоугольные.

Δ ACB $\sim\Delta$ MCK по двум углам, т. к $\angle$C-общий, $\angle$CAB=$\angle$ CMK=90°

Коэффициент подобия k $=\frac{BC}{KC}$, где BC и KC- гипотенузы подобных прямоугольных треугольников и образующие конусов.

Из Δ ACB находим BC=R$\sqrt{2}$, тогда коэффициент подобия k=$\frac{R\sqrt{2}}{R}$=$\sqrt{2}$.

В Δ MCK MK= $\frac{R}{\sqrt{2}}$, это радиус основания малого конуса, а значит радиус окружности.

Длина окружности C=$2\pi\frac{R}{\sqrt{2}}$= $\pi R\sqrt{2}$.

Критерии оценивания

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
7	Полное верное решение
6	Решение верное, но содержит незначительные погрешности
5	Решение верное, но некоторые переходы не обоснованы
4	Идеи решения приведены верно, но не доказано подобие конусов или треугольников
3	Приведены идеи для решения, но преобразования содержат существенные ошибки
2	Дан верный ответ, который обоснован некоторыми аргументами, но ясного обоснования решение не содержит
1	Дан верный ответ без обоснования
0	Решение отсутствует

.

4. *Доказательство.*

Оценим левую часть исходного неравенства, используя для этого неравенство Коши-Буняковского, т.е.

$$\left(\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}\right)^2=\left(1\cdot\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}+1\cdot\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}\right)^2\le$$

$$\le(1^2+1^2)\cdot\left(2-\sqrt{2+\sqrt{2}}+2+\sqrt{2+\sqrt{2}}\right)=2\cdot 4=8.$$

Отсюда следует неравенство

$$\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}\le 2\sqrt{2}. \qquad (*)$$

Для доказательства строгого неравенства необходимо показать, что в (*) равенства быть не может.

Предположим, что $\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}=2\sqrt{2}$.

Это возможно лишь в том случае, когда неравенство Коши-Буняковского превратилось в равенство. А это возможно лишь когда $\frac{1}{\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}}=\frac{1}{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}$.

Очевидно, что данное равенство неверно, поскольку числители дробей совпадают, а знаменатели – нет. Следовательно, исходное неравенство доказано.

Критерии оценивания

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
7	Полное верное решение
6	Решение верное, но содержит незначительные погрешности
5	Решение в целом верное, но некоторые этапы не обоснованы (например, не рассмотрены свойства иррациональных неравенств)
4	Приведены идеи для решения, но преобразования не доведены до конца
3	Приведены идеи для решения, но преобразования содержат существенные ошибки
2	Дан верный ответ, который обоснован некоторыми аргументами, но ясного обоснования решение не содержит
1	Дан верный ответ без обоснования
0	Решение отсутствует

5. *Ответ:* 0,384.

Решение:

Пусть событие A – Счастливчиков поступил (прошел по баллам) на направление подготовки «Архитектура», тогда $P(A) = 0{,}9 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}8 = 0{,}36$.

Событие B – Счастливчиков поступил (прошел по баллам) на направление подготовки «Дизайн», тогда $P(B) = 0{,}5 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}6 = 0{,}24$.

Вероятность того, что Счастливчиков поступил на оба направления (прошел и туда, и туда) определяется как $P(A \cap B) = 0{,}5 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}9 = 0{,}216$.

А вероятность того, что абитуриент Счастливчиков поступить хотя бы на одну из двух упомянутых направлений подготовки университета находится по формуле:

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0{,}36 + 0{,}24 - 0{,}216 = 0{,}384$.

Критерии оценивания

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
7	Полное верное решение с применением теорем о вероятности событий
6	Решение верное, но содержит незначительные погрешности
5	Решение верное, но не обозначены варианты событий поступления на различные специальности
4	Приведены идеи для решения, но преобразования не доведены до конца
3	Приведены идеи для решения, но допущены существенные ошибки
2	Дан верный ответ, но приведены только вычисления
1	Дан верный ответ без решения
0	Решение отсутствует