ОТВЕТЫ, РЕШЕНИЯ, КРИТЕРИИ

8 класс

1. *Ответ:* последняя цифра равна 5.

Решение:

Заметим, что число, оканчивающееся цифрой 3, при возведении в степень может дать число, в конце которого получается либо 9, либо 7, либо 1, либо 3. Причем через каждые четыре операции эта последовательность повторяется. Поэтому значение выражения 23^{24} оканчивается цифрой 1 (так как $23^{24} = (23^4)^6 = (\dots 1)^6 = \dots 1$) А число, оканчивающееся цифрой 4, при возведении в степень может дать число, в конце которого получается либо 4 (показатель степени нечетный), либо 6 (показатель степени четный). Причем через каждые две операции эта последовательность повторяется. Поэтому значение выражения 24^{23} оканчивается цифрой 4. В итоге, при сложении получим число, оканчивающееся цифрой 5.

Критерии оценивания

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
7	Полное верное решение
6	Решение содержит незначительные погрешности, но в целом, верно и может стать полностью правильным после небольших исправлений или дополнений
5	Решение содержит незначительные погрешности, некоторые переходы не обоснованы, но в целом верно и может стать полностью правильным после небольших исправлений или дополнений
4	Приведены идеи для решения, но преобразования содержат 1 существенную ошибку или не доведены до конца
3	Приведены идеи для решения, но преобразования содержат более 1 существенной ошибки или не доведены до конца
2	Дан верный ответ, который обоснован некоторыми аргументами, но ясного обоснования решение не содержит
1	Дан верный ответ. Решения не содержит
0	Решение отсутствует

Решение задания №2.

Доказательство:

I способ:

$$\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}+\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}=4$$

Возведём обе части данного равенства в куб:

$$\left(\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}\right)^3+3\cdot\left(\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}\right)^2\cdot\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}+3\cdot\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}\cdot\left(\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}\right)^2+$$
$$+\left(\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}\right)^3=4^3$$

$$20+\cancel{14\sqrt{2}}+3\cdot\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}\cdot\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}\cdot\left(\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}+\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}\right)+$$
$$+20-\cancel{14\sqrt{2}}=64$$

$$40+3\sqrt[3]{(20+14\sqrt{2})(20-14\sqrt{2})}\cdot\left(\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}+\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}\right)=64$$

$$40+3\sqrt[3]{400-392}\cdot\left(\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}+\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}\right)=64$$

$$40+3\cdot\sqrt[3]{8}\cdot\left(\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}+\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}\right)=64$$

$$40+3\cdot 2\cdot\left(\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}+\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}\right)=64$$

$$6\cdot\left(\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}+\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}\right)=64-40$$

$$6\cdot\left(\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}+\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}\right)=24 \quad |:6$$

$$\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}+\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}=4$$

Равенство доказано.

Доказательство:

II способ:

$$\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}+\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}=4$$

Пусть $\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}+\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}=x$

Возведём обе части данного равенства в куб:

$$\left(\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}\right)^3+3\cdot\left(\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}\right)^2\cdot\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}+3\cdot\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}\cdot\left(\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}\right)^2+$$
$$+\left(\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}\right)^3=x^3$$

$$20+\cancel{14\sqrt{2}}+3\cdot\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}\cdot\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}\cdot\left(\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}+\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}\right)+$$
$$+20-\cancel{14\sqrt{2}}=x^3$$

$$40+3\sqrt[3]{(20+14\sqrt{2})(20-14\sqrt{2})}\cdot\underbrace{\left(\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}+\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}\right)}_{x}=x^3$$

$$40+3\sqrt[3]{400-392}\cdot x=x^3$$

$$40+3\cdot\sqrt[3]{8}\cdot x=x^3$$

$$40+3\cdot2\cdot x=x^3$$

$$40+6x=x^3$$

$$x^3-6x-40=0$$

$x=4$ является корнем полученного уравнения.

Выполним деление многочлена $(x^3-6x-40)$ на многочлен $(x-4)$ методом „уголка".

$$\begin{array}{r|l}
x^3-6x-40 & x-4 \\
\underline{x^3-4x^2} & \overline{x^2+4x+10} \\
4x^2-6x & \\
\underline{4x^2-16x} & \\
10x-40 & \\
\underline{10x-40} & \\
0 &
\end{array}$$

Таким образом, многочлен $(x^3-6x-40)$ представили в виде произведения многочленов $(x-4)$ и $(x^2+4x+10)$.
Тогда уравнение $x^3-6x-40=0$ примет вид:

$(x-4)\cdot(x^2+4x+10)=0$

$x-4=0$; $x^2+4x+10=0$

$x=4$ $\quad D=\left(\frac{b}{2}\right)^2-ac$

$D=4-10=-6<0 \Rightarrow$ уравнение не имеет действительных корней.

Значит, $x=4$ является единственным корнем $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ равенство $\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}+\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}=4$ доказано.

Критерии оценивания

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
7	Полное верное решение. Равенство доказано.
6	Решение верное, имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение.
5	Решение содержит незначительные погрешности, некоторые переходы не обоснованы, но в целом верно и может стать полностью правильным после небольших исправлений или дополнений.
4	Решение неполное, не доведено до конца, отсутствуют пояснения в ходе рассуждений.
3	Верный ход рассуждений, допущена арифметическая ошибка. Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задания.
2	Рассмотрены отдельные важные случаи, решение не доведено до конца.
1	Найдена идея решения, продвижения отсутствуют.
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют. Решение отсутствует.

3. *Ответ:* нет, неверно.

Решение:

Вычислим вначале площадь закрашенной области (рис. 1)

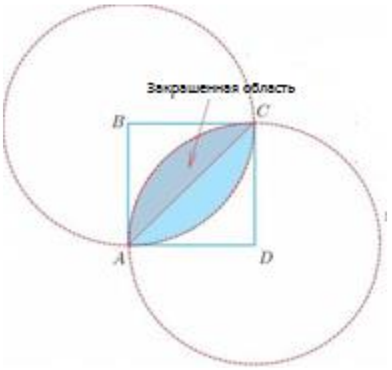


Рис. 1

Рассмотрит площадь четверти круга $S_{ADC} = S_{круга}/4 = \pi R^2/4$

Если взять две четверти круга, то их площадь суммарно будет составлять $\frac{\pi R^2}{4} + \frac{\pi R^2}{4} = \frac{\pi R^2}{2}$

Сложив четверть круга и еще четверть круга, имеем две не закрашенные области и дважды закрашенную область. Другими словами, две четверти кругов составляют по площади квадрат плюс закрашенную область.

Учитывая, что радиус окружности равен 1 и что площадь квадрата равна 1, получим, что площадь закрашенной части равна $\frac{\pi}{2} - 1$. Площадь не закрашенной части квадрата найдем из выражения $1 - (\pi/2 - 1) = 2 - \pi/2$. Приближенное значение этого выражения равно $2 - \frac{3{,}14}{2} = 0{,}43 < 0{,}5$.

Критерии оценивания

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
7	Полное верное решение
6	Решение содержит незначительные погрешности, но в целом, верно и может стать полностью правильным после небольших исправлений или дополнений
5	Решение содержит незначительные погрешности, некоторые переходы не обоснованы, но в целом верно и может стать полностью правильным после небольших исправлений или дополнений
4	Приведены идеи для решения, но преобразования содержат 1 существенную ошибку или не доведены до конца
3	Приведены идеи для решения, но преобразования содержат более 1 существенной ошибки или не доведены до конца
2	Дан верный ответ, который обоснован некоторыми аргументами, но ясного обоснования решение не содержит
1	Дан верный ответ. Решения не содержит.
0	Решение отсутствует

4. *Ответ:* $x^2 + x + 1$, $2x^2 + 2x + 2$.

Решение.

Обозначим $P(x) = ax^2 + bx + c$. Подставив $x = 0$ в исходное неравенство, получаем оценку на c: $1 \le c \le 2$. Поскольку $x^2 + x + 1 > 0$ при всех x получаем, что $a \ge 1$. Из $(2 - a)\,x^2 + (2 - b)\,x + 2 - c \ge 0$ при всех х получаем, что $a \le 2$.

Случай 1. $\boldsymbol{a = 1}$.

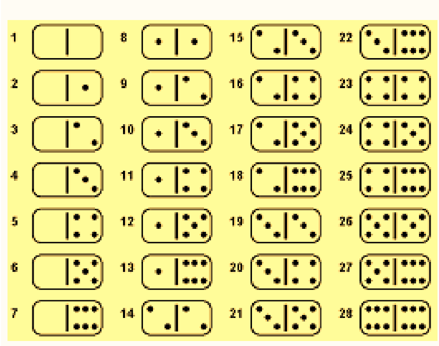
В условии левая часть неравенства принимает вид $(b - 1)\,x + (c - 1) \ge 0$. Очевидно, что $\boldsymbol{b = 1}$, иначе при $x < \frac{1-c}{b-1}$ левое неравенство нарушается. Кроме того, если неравенство равносильно $x^2 + x \ge 0$ и не выполняется при $x = -1/2$. Итак, в рассматриваемом случае только квадратный трёхчлен $x^2 + x + 1$ удовлетворяет условию задачи.

Случай 2. $\boldsymbol{a = 2}$.

В условии правая часть неравенства принимает вид: $(2 - b)\,x + 2 - c \ge 0$. Очевидно, что $\boldsymbol{b = 2}$, а если $\boldsymbol{c = 1}$, то левое неравенство равносильно $x^2 + x \ge 0$ и не выполняется при $x = -1/2$. В рассматриваемом случае только квадратный трёхчлен $2x^2 + 2x + 2$ удовлетворяет условию задачи.

Критерии оценивания

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
7	Полное верное решение
6	Решение содержит незначительные погрешности, но в целом, верно и может стать полностью правильным после небольших исправлений или дополнений
5	Решение содержит незначительные погрешности, некоторые переходы не обоснованы, но в целом верно и может стать полностью правильным после небольших исправлений или дополнений
4	Приведены идеи для решения, но преобразования содержат 1 существенную ошибку или не доведены до конца
3	Приведены идеи для решения, но преобразования содержат более 1 существенной ошибки или не доведены до конца
2	Дан верный ответ, который обоснован некоторыми аргументами, но ясного обоснования решение не содержит
1	Дан верный ответ, ясного обоснования решение не содержит.
0	Решение отсутствует



5. *Ответ:* 147 способов.

Решение:

Сначала выберем одну кость. Это можно сделать 28 способами, так как всего 28 костей домино. При этом в 7 случаях выбранная кость окажется «дублем», то есть костью вида 00, 11, 22, 33, 44, 55, 66, а в 21 случае – костью с различными числами очков, то есть костью вида 01, 02, 03, 04, 05, 06, 12, 13, 14, 15, 16, 23, 24, 25, 26, 34, 35, 36, 45, 46, 56.

1 случай. Рассмотрим первый случай, когда первая кость является «дублем».

1 способ решения: если первая кость является «дублем», а это 7 вариантов (00, 11, 22, 33, 44, 55, 66), то к ней вторую кость можно выбрать 6 способами (6 «не дублей»).

Таким образом, по правилу произведения вариантов выбора: $7\cdot6=42$.

Возможно следующее рассуждение.

2 способ решения:

<u>1 вариант выбора:</u> для кости 00 можно взять одну из костей 01, 02, 03, 04, 05, 06.

<u>2 вариант выбора:</u> для кости 11 можно взять одну из костей 01, 12, 13, 14, 15, 16.

<u>3 вариант выбора:</u> для кости 22 можно взять одну из костей 02, 12, 23, 24, 25, 26.

<u>4 вариант выбора:</u> для кости 33 можно взять одну из костей 03, 13, 23, 34, 35, 36.

<u>5 вариант выбора:</u> для кости 44 можно взять одну из костей 04, 14, 24, 34, 45, 46.

<u>6 вариант выбора:</u> для кости 55 можно взять одну из костей 05, 15, 25, 35, 45, 56.

<u>7 вариант выбора:</u> для кости 66 можно взять одну из костей 06, 16, 26, 36, 46, 56.

Таким образом, вариантов выбора: $6+6+6+6+6+6+6=6\cdot7=42$.

2 случай. Рассмотрим второй случай, когда первая кость с различными числами очков.

1 способ решения: если первая кость с различными числами очков, а это 21 вариант (01, 02, 03, 04, 05, 06, 12, 13, 14, 15, 16, 23, 24, 25, 26, 34, 35, 36, 45, 46, 56), то к ней вторую кость можно выбрать 12 способами (к первому числу подходит 6 костей и ко второму числу подходит 6 костей, значит для первой кости – «не дубль» подходит 12 вариантов).

Таким образом, по правилу произведения вариантов выбора: $21\cdot12=252$.

Возможно следующее рассуждение.

2 способ решения:

<u>1 вариант выбора:</u> для кости 01 можно взять одну из костей 00, 02, 03, 04, 05, 06, 11, 12, 13, 14, 15, 16.

<u>2 вариант выбора:</u> для кости 02 можно взять одну из костей 00, 01, 03, 04, 05, 06, 12, 22, 23, 24, 25, 26.

<u>3 вариант выбора:</u> для кости 03 можно взять одну из костей 00, 01, 02, 04, 05, 06, 13, 23, 33, 34, 35, 36.

<u>4 вариант выбора:</u> для кости 04 можно взять одну из костей 00, 01, 02, 03, 05, 06, 14, 24, 34, 44, 45, 46.

<u>5 вариант выбора:</u> для кости 05 можно взять одну из костей 00, 01, 02, 03, 04, 06, 15, 25, 35, 45, 55, 56.

<u>6 вариант выбора:</u> для кости 06 можно взять одну из костей 00, 01, 02, 03, 04, 05, 16, 26, 36,

46, 55, 56.

7 вариант выбора: для кости 12 можно взять одну из костей 01, 11, 13, 14, 15, 16, 02, 22, 23, 24, 25, 26.

8 вариант выбора: для кости 13 можно взять одну из костей 01, 11, 12, 14, 15, 16, 03, 23, 33, 34, 35, 36.

9 вариант выбора: для кости 14 можно взять одну из костей 01, 11, 12, 13, 15, 16, 04, 24, 34, 44, 45, 46.

10 вариант выбора: для кости 15 можно взять одну из костей 01, 11, 12, 13, 14, 16, 05, 25, 35, 45, 55, 56.

11 вариант выбора: для кости 16 можно взять одну из костей 01, 11, 12, 13, 14, 15, 06, 26, 36, 46, 56, 66.

12 вариант выбора: для кости 23 можно взять одну из костей 02, 12, 22, 24, 25, 26, 03, 13, 33, 34, 35, 36.

13 вариант выбора: для кости 24 можно взять одну из костей 02, 12, 22, 23, 25, 26, 04, 14, 34, 44, 45, 46.

14 вариант выбора: для кости 25 можно взять одну из костей 02, 12, 22, 23, 24, 26, 05, 15, 35, 45, 55, 56.

15 вариант выбора: для кости 26 можно взять одну из костей 02, 12, 22, 23, 24, 25, 06, 16, 36, 46, 56, 66.

16 вариант выбора: для кости 34 можно взять одну из костей 03, 13, 23, 33, 35, 36, 04, 14, 24, 44, 45, 46.

17 вариант выбора: для кости 35 можно взять одну из костей 03, 13, 23, 33, 34, 36, 05, 15, 25, 45, 55, 56.

18 вариант выбора: для кости 36 можно взять одну из костей 03, 13, 23, 33, 34, 35, 06, 16, 26, 46, 56, 66.

19 вариант выбора: для кости 45 можно взять одну из костей 04, 14, 24, 34, 44, 46, 05, 15, 25, 35, 55, 56.

20 вариант выбора: для кости 46 можно взять одну из костей 04, 14, 24, 34, 44, 45, 06, 16, 26, 36, 56, 66.

21 вариант выбора: для кости 56 можно взять одну из костей 05, 15, 25, 35, 45, 55, 06, 16, 26, 36, 46, 66.

Таким образом, вариантов выбора:
$12+12+12+12+12+12+12+12+12+12+12+12+12+12+12+12+12+12+12+12+12=12\cdot 21=252$.

Значит, по правилу суммы получаем $42+252=294$ способов выбора пары.

В проведенном рассуждении учитывался и порядок, в котором выбирали кости. Поэтому каждая пара костей появлялась дважды (например, первый раз 01 и 16, а второй раз 16 и 01). Если не учитывать порядок выбора костей, то получим вдвое меньше способов выбора, то есть $294:2=147$ способов.

Критерии оценивания

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
7	Полное верное решение. Дан верный ответ на вопрос задачи.
6	Решение верное, имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение.
5	Решение содержит незначительные погрешности, некоторые переходы не обоснованы, но в целом верно и может стать полностью правильным после небольших исправлений или дополнений.
4	Решение неполное, не доведено до конца, отсутствуют арифметические ошибки.
3	Верный ход рассуждений, допущена арифметическая ошибка. Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задания.
2	Рассмотрены отдельные важные случаи, решение не доведено до конца.
1	Найдена идея решения, продвижения отсутствуют.
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют. Решение отсутствует, записан только верный ответ.